無限生成アーベル群の基本定理と局所無限生成代数的位相幾何への試み(数学基礎論及びその応用)

江田, 勝哉

数理解析研究所講究録
540巻 1984年 178-188

無限生成アーベル群の基本定理と局所無限生成代数的位相幾何への試み

筑波大 江田勝哉 (Katsuya Eda)

よく知られているように有限生成のアーベル群の基本定理は "Aが有限生成アーベル群とすると、Aは自由アーベル群 $\oplus_F \mathbb{Z}$ と torsion 部分群 $T(A)$ との直和である。つまり $A \simeq \oplus_F \mathbb{Z} \oplus T(A)$, $T(A) = \{x : nx = 0, n: 自然数\}$。" である。この定理は有限生成でないときは成立しない。$T(A)$ が直和因子とは限らないし、又 torsion free な群が自由アーベル群とは限らない。Nunke (1962) は Slender 群の特徴付けの際に、可算積 $\mathbb{Z}^N$ の homomorphic image について次のことを証明した。" $\mathbb{Z}^N \twoheadrightarrow A$ ならば、$A \simeq \mathbb{Z}^J \oplus C$ (C は cotorsion 群) である。とくに $C = \{x \in A : h(x) = 0 \text{ for all } h \in \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z})\}$ であり、$\oplus_J \mathbb{Z} \simeq \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z})$。" 有限生成のアーベル群は $\mathbb{Z}^N$ の homomorphic image であり、有限生成ならば torsion であることと cotorsion であることは同値であるので、これは上の基本定理の拡張であると考えられる。しかし今までの

ところこれをそのようにとらえた研究はないようである。その理由の1つは I を非可算とするとき $\mathbb{Z}^I$ の homomorphic image について可算のときのようなことが成立しないことがよく知られているからだと思う。

一年程前に筆者は Nunke の結果を次のように拡張した。
"Σ-product $\tilde{\mathbb{Z}}^I = \{x \in \mathbb{Z}^I : \{i : x(i) \neq 0\}$ 可算 $\}$ について $\tilde{\mathbb{Z}}^I \twoheadrightarrow A$ ならば $A \simeq \tilde{\mathbb{Z}}^J \oplus C$ （C は cotorsion）が成立する。とくに
$C = \{x \in A : h(x) = 0 \text{ for all } h \in \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z})\}$ で
$\bigoplus_J \mathbb{Z} \simeq \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z})$。" 又、いかなる cotorsion 群もある $\tilde{\mathbb{Z}}^I$ の homomorphic image であるから、Σ-product $\tilde{\mathbb{Z}}^I$ と cotorsion 群の組合せが有限生成の場合の定理の拡張の一つの方向と考えられる。アーベル群の応用の一つとして Algebraic Topology に目を向ける。

局所的に単連結でない位相空間は Algebraic Topology では空間を Inverse limit に展開し、それに対応する群の Inverse system として取扱われている。前記の定理は "Finite support $\longrightarrow$ Countable support" という図式により有限生成の Algebraic Topology を今までと異なった方向へ拡張しうる可能性を示唆しているように思える。そのような拡張の試みの一つとして次の空間に注目する。

$$H = \{(x, y) : (x - \tfrac{1}{n})^2 + y^2 = \tfrac{1}{n^2},\ n \in N\}.$$

このHはHawaiian ear ringと呼ばれている空間である。これを一般化して $S_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ に対して

$H_I = \{f \in (S_1)^I : \exists i\ \forall j \neq i\ f(j) = (1, 0)\}$、但し $(S_1)^I$ は通常の積空間の位相をもち、H_I はその部分空間である。Iが可算集合ならHと同相である。Hの基本群及びSingular Homology群についてはH. B. Griffiths (1952, 53) の研究があるがその後あまり研究成果はないようである。Griffiths はHの基本群をInverse limitの部分群として表示した。つまり $\pi_1(H) = \bigcap_{n \in N} G_n$,

$$G_n = \mathop{*}_{i=1}^{n} \mathbb{Z} * \varprojlim_{m \geqq n+1} \left(\mathop{*}_{i=n+1}^{m} \mathbb{Z},\ j_{n+1}^{m}\right),\ 但し$$

$$j_n^m : \mathop{*}_{i=n}^{m+1} \mathbb{Z} \to \mathop{*}_{i=n}^{m} \mathbb{Z}\ は標準的射影。$$

筆者はこの結果を知らなかったこともあって次のFree Σ-productを考え、$\pi_1(H_I)$ の表示をした。

群 $G_i\ (i \in I)$（但し $G_i \cap G_j = \phi,\ i \neq j$）に対して、可算語 W の全体を $\mathcal{W}_I$ とする。可算語 W とは、定義域を可算の全順序集合とする関数で、各々の $i \in I$ について、$\{\mu : W(\mu) \in G_i\}$ が有限で値域は $\bigcup_{i \in I} G_i$ に含まれるものである。

（通常の語の場合 長さが有限であるのでことさら語を関

数としては扱っていないが厳格に言えば例えば上記のような形式をとると思われる。又この場合定義域を有理数全体に制限して　よいが、積の定義が面倒になるのでこのようにしておく。)

有限部分集合 $F \subseteq I$ について、W_F を W から $\bigcup_{i \in F} G_i$ に入らない文字を取り除いてできる有限の長さの語とする。つまり $W_F = \{(x, y) : (x, y) \in W \ \& \ y \in \bigcup_{i \in F} G_i\}$ で $\mathrm{dom}(W_F)$ は $\mathrm{dom}(W)$ の部分順序集合。W_F は通常の Free product $*_{i \in F} G_i$ の元の表示と考えられるから その元を $\langle W_F \rangle$ とする。同値関係 $W \sim W'$ を すべての有限部分集合 $F \subseteq I$ について $\langle W_F \rangle = \langle W'_F \rangle$ なることと定義する。又 W と W' の結合 $W \cdot W'$ を通常の語と同じように $\mathrm{dom}(W \cdot W')$ は $\mathrm{dom}(W)$ と $\mathrm{dom}(W')$ の順序集合としての和、つまり

$$\mathrm{dom}(W \cdot W') = \{(0, \alpha) : \alpha \in \mathrm{dom}(W)\} \cup \{(1, \beta) : \beta \in \mathrm{dom}(W')\}$$

とし、$W \cdot W'((0, \alpha)) = W(\alpha)$

$W \cdot W'((1, \beta)) = W(\beta)$ で定義する。

すると $\mathcal{W}_I/\sim \ = \{\langle W \rangle : W \in \mathcal{W}_I\}$ に自然に積

$\langle W \rangle \langle W' \rangle = \langle W \cdot W' \rangle$ が定義でき群となる。

これを Free Σ-product $\hat{*}_{i \in I} G_i$ とする。

任意の有限部分集合 $F \subseteq I$ に対して自然な射影

$p_F(<W>) = <W_F>$, $p_F : \tilde{*}_{i\in I} G_i \to *_{i\in F} G_i$
が存在する。

例えば、$\pi_1(H) = \tilde{*}_{n\in N} G_n \ (= \tilde{*}_{n\in N} \mathbb{Z})$ である。

(但し、$G_n = \mathbb{Z}$)

一般に、(X_i, c_i) を c_i で局所単連結で又 c_i で第一可算な弧連結空間とし $\pi_1(X_i) = G_i$ とする。積空間 $\prod_{i\in I} X_i$ の部分空間 $\tilde{\bigvee}_{i\in I}(X_i, c_i) = \{ f \in \prod_{i\in I} X_i : \exists i \ \forall j \neq i \ (f(j) = c_j) \}$ に対して、$\pi_1(\tilde{\bigvee}_{i\in I}(X_i, c_i)) = \tilde{*}_{i\in I} G_i$ が成立する。証明は弧が separable であることから index I が可算のときに帰着するので Griffiths の証明を使える。ただ I が非可算の場合は Inverse limit の部分群として表記するのは複雑になることから、又空間 $\tilde{\bigvee}_{i\in I}(X_i, c_i)$ の弧は自然に可算の長さの語が対応するので、Free Σ-product で表記することは自然であると思われる。

Homology 群についても、Singular homology 群と少し異った上記のような空間にあったものが存在してもよいと思われる。Singular homology 群は自由アーベル群を基礎に定義されている。これを $\mathbb{Z}$ の Σ-product $\tilde{\mathbb{Z}}^I$ を基礎に定義できれば、筆者のもくろみは大体終わるのだけれども、今のところうすぼんやりしておりどのように定義したらよいのかよくわからない状態である。そこで以下では Hawaiian ear ring

その他の空間のSingular homology groupについての結果を述べる。筆者のもくろみからすれば以下の結果は $H_1(T, \mathbb{Z})$ を上記のような空間について考えることがいかに具合いの悪いことかを示す結果と考えられるのだが，もくろみが成功していないのだから，単に $H_1(T, \mathbb{Z})$ について調べていると考えてもよいと思う。

$H_1(\widetilde{V}_{i\in I}(X_i, c_i), \mathbb{Z})$ は $G_i = \pi_1(X_i)$ のとき $\widetilde{*}_{i\in I} G_i$ のアーベル化である。この群は G_i の Σ-product $\widetilde{\prod}_{i\in I} G_i$ のアーベル化とよく似た性質をもっているので $\widetilde{*}_{i\in I} G_i$ と $\widetilde{\prod}_{i\in I} G_i$ のアーベル化群を考察する。$\widetilde{\prod}_{i\in I} G_i$ は空間 X_i ($\pi_1(X_i) = G_i$) の Σ-product $\widetilde{\prod}_{i\in I}(X_i, c_i)$ の π_1 である。（基本群が積について可換であることは自明であるが，孤がseparableであることから Σ-productとも可換である。）

定義：（Dugas - Göbel）　アーベル群 A が complete modulo the first Ulm subgroup.（complete mod. U）とは任意の列 $(x_n : n \in N)$ について $n! \mid x_{n+1} - x_n$ ならある x が存在して $n! \mid x - x_n$ が成立すること。

命題：（Dugas - Göbel）　アーベル群 A がAlgebraically compactであることと A が complete mod. U でかつ $U(A) = U(U(A))$（但し $U(A) = \bigcap_{n\in N} nA$）が成立することが同値である。

命題： アーベル群Aが complete mod. U なら
$\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z}) = 0$ である。

群Gのアーベル化群 $G/[G,G]$ を $\overline{G}$ で表わす。又アーベル化写像を $[\ ]: G \to \overline{G}$ とする。

$p: \tilde{\ast}_{i\in I} G_i \to \tilde{\prod}_{i\in I} \overline{G_i}$ を $p(\langle W\rangle)(i) = [\langle W_{\{i\}}\rangle]$,
$q: \tilde{\prod}_{i\in I} G_i \to \tilde{\prod}_{i\in I} \overline{G_i}$ を $q(f)(i) = [f(i)]$ で定義する。 p, q は 全射である。

定理：

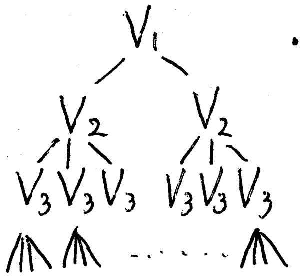
(i) $\mathrm{Ker}(p)/[\tilde{\ast} G_i, \tilde{\ast} G_i]$

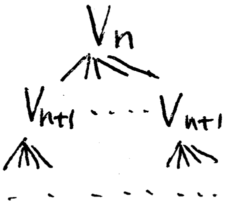
(ii) $\mathrm{Ker}(q)/[\tilde{\prod} G_i, \tilde{\prod} G_i]$ は共に complete

mod. U である。

証明

(i) $n! \mid [a_{n+1}] - [a_n]$ とする。 $a_n = \langle W_n\rangle$ とすれば ある可算集合 $C \subseteq I$ があって $\mathrm{image}(W_n) \subseteq \bigcup_{i\in C} G_i$ がすべての $n \in N$ に成立する。よって $I = N$ としても一般性を失わない。 ある c_n が存在して $(c_n)^{-n!} a_{n+1} \cdot a_n^{-1}$ が交換子群 $[\tilde{\ast} G_i, \tilde{\ast} G_i]$ に属する。 c_n は $\mathrm{Ker}(p)$ の元であるから image $V_n \cap \bigcup_{i\leq n} G_i = \phi$ なるように $c_n = \langle V_n\rangle$ なる可算語 V_n をとることができる。

 $\cdot\, W_1$ を辞書式にならべた語を W^* とする。 V_n のえらび方からこれは可算語となっている。

各々の n について $\langle W^* \rangle = \langle U_n \rangle^{n!} \langle V_{n-1} \rangle^{(n-1)!} \cdots \langle V_1 \rangle \langle W_1 \rangle \cdot d$ がある $d \in [\,{}^*\tilde{G}_i,\ {}^*\tilde{G}_i\,]$ について成立する。但し、ここで U_n は  なる語である。

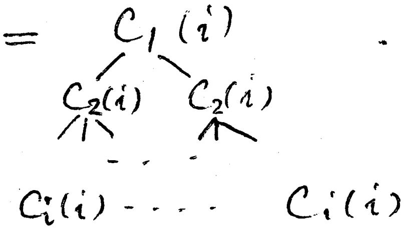
よって $\langle W^* \rangle a_n^{-1}$

$= \langle U_n \rangle^{n!} a_n \cdot a_{n-1}^{-1} a_{n-1} \cdot a_{n-2}^{-1} \cdots a_1^{-1} \cdot a_1 \cdot a_n^{-1} \cdot d'$ がある $d' \in [\,{}^*\tilde{G}_i,\ {}^*\tilde{G}_i\,]$ について成立する。

よって $n! \mid [\langle W^* \rangle] - [a_n]$。

(ii). (i)のときと同様 $I = N$ を仮定しても一般性を失わない。

$n! \mid [a_{n+1}] - [a_n]$ とする。 $a_n \in \mathrm{Ker}(q)$ だから、$a_n(i) = 1 \ (i \le n)$ を仮定してもよい。よってある c_n で $c_n^{-n!} a_{n+1} \cdot a_n^{-1} \in [\,\hat{\prod} G_i,\ \hat{\prod} G_i\,]$ で $c_n(i) = 1 \quad (i \le n)$ なるものが存在する。

$a^*(i) =$  $\cdot\ a_1(i)$.

$$b_n(i) = 1 \quad (i \le n)$$

$$b_n(i) = \begin{array}{c} c_n(i) \\ c_{n+1}(i) \cdots\cdots c_{n+1}(i) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_i(i) \cdots\cdots\cdots\cdots c_i(i) \end{array} \qquad (i > n)$$

とおけば、 $a^*(i)\cdot a_n^{-1}(i)$

$= (b_n(i))^{n!}\, a_n(i)\cdot a_{n-1}(i)^{-1} \cdots a_1(i)^{-1} a(i)\, a_n(i)^{-1}\cdot C(i)$

がある $C \in [\widehat{\prod} G_i, \widehat{\prod} G_i]$ について成立する。

よって $n! \mid [a^*] - [a_n]$。

ところで $\overline{G_i}$ が torsionfree のとき、$\widehat{*}G_i/\mathrm{Ker}(p)$ 及び $\widehat{\prod}G_i/\mathrm{Ker}(q)$ は torsionfree であるから、$\mathrm{Ker}(p)/[\ ,\ ]$ 及び $\mathrm{Ker}(q)/[\ ,\ ]$ が algebraically compact なら、それらは $\widehat{*}G_i$ 及び $\widehat{\prod}G_i$ のアーベル化群の直和因子となる。とくにアーベル化群 $\widehat{*}G_i$ 及び $\widehat{\prod}G_i$ が torsion free なら $U(U(A)) = U(A)$ は満たされるのでそれが成立する。しかし筆者はこれについてわからない。

問題1. $G_i = \mathbb{Z}$ のとき $\widetilde{*}_{i\in N} G_i$ は torsionfree か？
又、$G_i = \mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ のとき $\widehat{\prod}_{i\in N} G_i$ は torsionfree か？

とくに $\prod_N \mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ が torsionfree かどうかは、次の同値条件がある。

交換子群 $[G, G]$ の元 x について.

$$\rho(x) = \min\{n : x = [x_1 y_1] \cdots [x_n y_n] \text{ for some } x_i, y_i \in G\}$$

命題 : G が torsionfree であるとき, $\overline{\prod_N G}$ に torsion n の元が存在すること (i.e. $\exists x \neq 0\ \ nx = 0$) と次の命題は同値である。

(*) ある自然数 M があって $\sup\{\rho(x) : \rho(x^n) \leq M\} = \infty$。

問題2. $\overline{\prod_N(\mathbb{Z} * \mathbb{Z})}$ は torsionfree か? つまり任意の n, M について $\sup\{\rho(x) : \rho(x^n) \leq M, x \in [\mathbb{Z}*\mathbb{Z}, \mathbb{Z}*\mathbb{Z}]\}$ が有限か?

もし答が肯定的なら $\overline{\prod_N(\mathbb{Z} * \mathbb{Z})}$ は $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})^N (\simeq \mathbb{Z}^N)$ と Algebraically compact abelian group の直和となる。

$\widetilde{*}_{i \in I} G_i$, 及び $\widetilde{\prod}_{i \in I} G_i$ のアーベル化は $Ker(p)$ 及び $Ker(q)$ が一般に nontrivial であるためほとんどの場合 torsion free な divisible な部分群をもつ。

定理. G_n を非自明群とする。

$\overline{\widetilde{*}_{n \in N} G_n}$ は $\oplus_{2^{\aleph_0}} \mathbb{Q}$ を部分群として含む。(但し $\mathbb{Q}$ は有理数全体のなす加法群。)

H_n, H_n' を非自明群で少なくとも一方は $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ でない。このとき $\overline{\prod_{n \in N} H_n * H_n'}$ は $\oplus_{2^{\aleph_0}} \mathbb{Q}$ を部分群として

含む。

(Main Lemma.)

$G = H_1 * H_2$ (H_1 ; H_2 は非自明群で少なくとも1つは $\mathbb{Z}_2$ でない。) とする。このとき $c \in [G, G]$ で任意の無限部分集合 $S \subseteq N$ について、$\sup\{\rho(c^n) : n \in S\} = \infty$ なるものが存在する。

証明は略す。

(参考文献)

Dugas, M. - Göbel, R. : Algebraische kompakte Faktorgruppen, J. reine angrew. Math. 307/308, 341-352 (1979).

Griffiths, H. B. : The Fundamental group of two spaces with a common point, Quat. J. Math. 5, 175-190 (1954)

Nunke, R. J. : On direct products of infinite cyclic groups, Proc. AMS, 13, 66-71 (1962)

Nunke, R. J. : Slender groups, Acta Sci. Math. Szeged 23, 67-73 (1962)